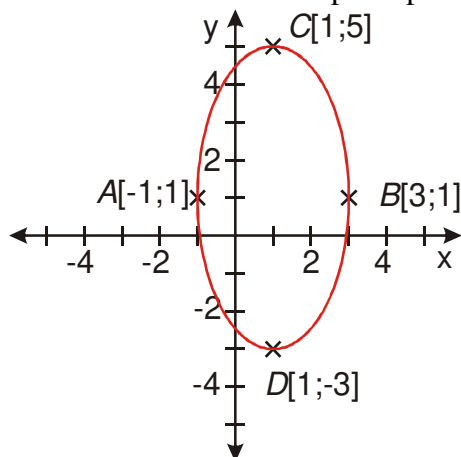


7.5.8 Středová rovnice elipsy

Předpoklady: 7501, 7507

Př. 1: Vrcholy elipsy leží v bodech $A[-1;1]$, $B[3;1]$, $C[1;5]$, $D[1;-3]$. Urči parametry elipsy a souřadnice jejích ohnisek.

Zadané souřadnice už na první pohled vypadají podezřele, nakreslíme si obrázek:



\Rightarrow elipsa je svisle orientovaná \Rightarrow ohniska neleží na přímce AB ale na přímce CD .

Střed elipsy = střed úsečky AB : $S\left[\frac{-1+3}{2}; \frac{1+1}{2}\right] = [1;1]$.

Vodorovná poloosa (nyní vedlejší) $a = |SA| = 2$.

Svislá poloosa (nyní hlavní) $b = |SC| = 4$.

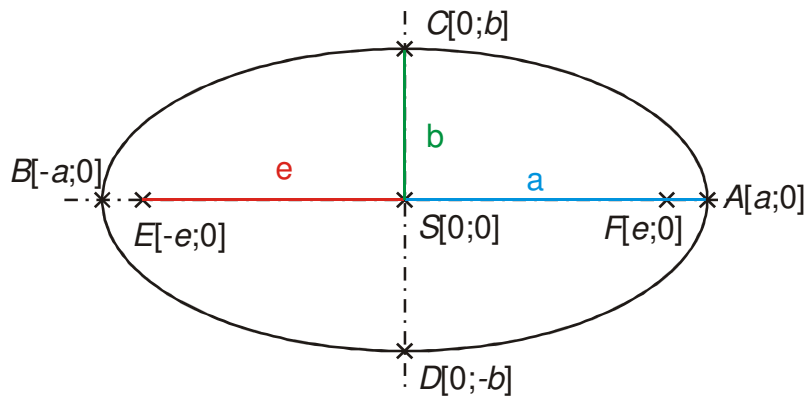
Výstřednost: $b^2 = a^2 + e^2 \Rightarrow e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve svislém směru) $F[1;1-2\sqrt{3}]$, $E[1;1+2\sqrt{3}]$.

Př. 2: Je dána elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosou a , vedlejší poloosou b a výstředností e . Urči souřadnice jejích ohnisek a vrcholů. Na základě rovnosti z definice elipsy, poznatků o vzájemných vztazích parametrů a , b , e odvoď rovnici této elipsy.

Stejný příklad jako předchozí, jenom máme písmenka místo čísel.

Střed elipsy je v počátku $\Rightarrow S[0;0]$.



Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[a;0]$, $B[-a;0]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[0;b]$; $D[0;-b]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F[e;0]$, $E[-e;0]$.

Bod $X[x; y]$ leží na elipse, pokud vyhovuje podmínce $|XE| + |XF| = 2a$.

Dosadíme do rovnice: $\sqrt{(x - e_1)^2 + (y - e_2)^2} + \sqrt{(x - f_1)^2 + (y - f_2)^2} = 2a$.

Dosadíme souřadnice bodů $E[-e;0]$ a $F[e;0]$:

$$\sqrt{(x - (-e))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - e)^2 + (y - 0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} + \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a \quad |^2$$

$$(x + e)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x + e)^2 + y^2}\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + (x - e)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 + 2\sqrt{(x + e)^2 + y^2}\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2\sqrt{(x + e)^2 + y^2}\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + 2(x^2 + e^2 + y^2) = 4a^2 \quad | : 2$$

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2}\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a^2 - (x^2 + e^2 + y^2) \quad |^2$$

$$[(x + e)^2 + y^2][(x - e)^2 + y^2] = [2a^2 - (x^2 + e^2 + y^2)]^2$$

$$(x + e)^2(x - e)^2 + y^2(x + e)^2 + y^2(x - e)^2 + y^4 = 4a^4 - 2 \cdot 2a^2(x^2 + e^2 + y^2) + (x^2 + e^2 + y^2)^2$$

Přestává to být únosné, necháme se radši podat, rovnici je možné upravit do tvaru:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad \text{použijeme } a^2 - e^2 = b^2$$

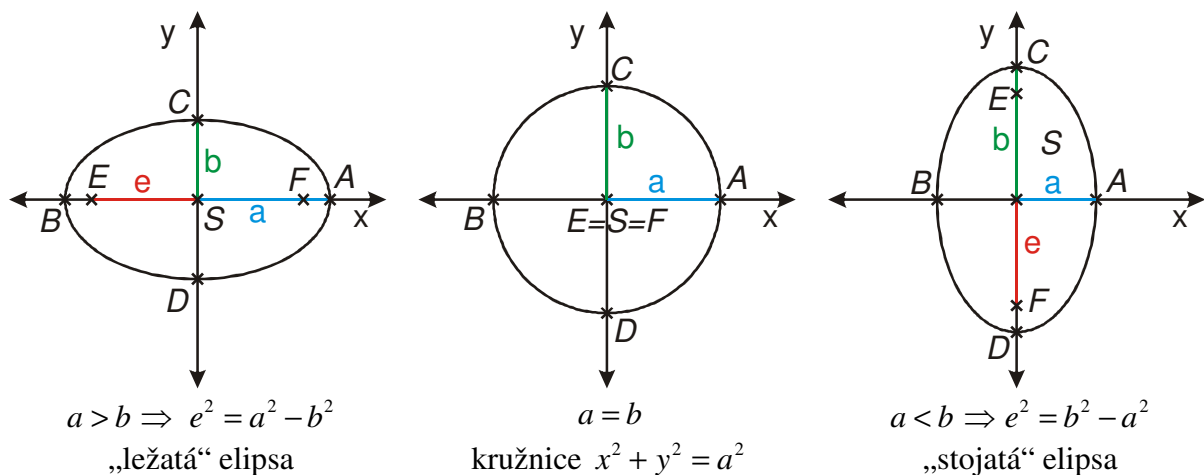
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{rovnice elipsy})$$

Zbývá dokázat, že získaná rovnice je ekvivalentní s původní rovnicí. Tomu se vyhneme stejně, jako jsme se vyhnuli upravování rovnice, a spolehneme se na práci jiných, kteří to dokázali před námi.

Elipsa, jejíž osy jsou shodné s osami soustavy souřadnic (a jejíž střed tedy leží v počátku soustavy souřadnic), je popsána rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Podle vzájemné velikost parametrů a , b mohou nastat tři možnosti:



Dohoda o značení: Existují různé způsoby značení poloos a vrcholů elips. Neexistuje žádný matematický důvod, proč by se mohl používat pouze jeden z nich.

- My budeme dodržovat nepsanou úmluvu v gymnaziální sadě matematických učebnic. Písmenem a značíme vodorovnou poloosu (bez ohledu na to, zda je hlavní nebo vedlejší), písmenem b značíme svislou poloosu (opět bez ohledu na to, zda je hlavní nebo vedlejší). Stejně tak písmena A, B používáme pro vrcholy na vodorovné ose a písmena C, D pro vrcholy na svislé ose (opět bez ohledu na to, zda jsou hlavní nebo vedlejší). Označení tedy vážeme na souřadnici (směr), ne na význam.
- V Petákové se používá opačný přístup, kdy písmena A, B patří vždy hlavním vrcholům bez ohledu na orientaci elipsy. Podobně je hlavní poloosa vždy značena jako a , bez ohledu na její orientaci (zda je svislá nebo vodorovná). Stejně označení se používá i v středoškolských tabulkách.

Ani jeden z přístupů nijak neovlivňuje výsledky příkladů, jde vždy o to správně rozhodnout, jaký význam body v konkrétní situaci mají. Jejich pojmenování sice usnadňuje orientaci, ale podstatu problému nemění.

Už vůbec pak v textu netrvám na tom, aby vrchol C ležel na horní hranici elipsy.

Př. 3: Elipsa je dána rovnicí $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Urči její typ, poloosy, výstřednost, vrcholy a ohniska.

Z rovnice vidíme: $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow$ jde o „stojatou“ elipsu.

Výstřednost: $b^2 = a^2 + e^2 \Rightarrow e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Střed v počátku $S[0;0]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[2;0]$, $B[-2;0]$.

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[0;3]$; $D[0;-3]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve svislém směru): $F[0;\sqrt{5}]$, $E[0;-\sqrt{5}]$.

Zatím známe pouze rovnici elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic.

Vzpomínka na kružnice:

- $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$ kružnice se středem v počátku.
- $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow$ kružnice se středem v bodě $S[2;-1]$.

Př. 4: Napiš rovnici elipsy, která je shodná s elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a jejíž střed leží v bodě $[2; -1]$.

Podle analogie s rovnicí kružnice půjde zřejmě o rovnici $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

Př. 5: Napiš rovnici elipsy se středem v bodě $S[m; n]$ s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

Podle předchozího příkladu jde zřejmě o rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

Elipsa, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a jejíž střed leží v bodě

$S[m; n]$ je popsána rovnicí $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

Rovnici budeme podobně jako u kružnice říkat středová.

Poznámka: Pozornější si určitě všimli, že rovnice, které máme k dispozici, popisují pouze elipsy, jejichž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Rovnice elipsy, která je natočená, je podstatně složitější a proto se jí nezabýváme.

Př. 6: Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$.

Z rovnice víme: $S[2; -1]$, $a = 4$, $b = 5 \Rightarrow$ „stojatá“ elipsa.

Excentricita: $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

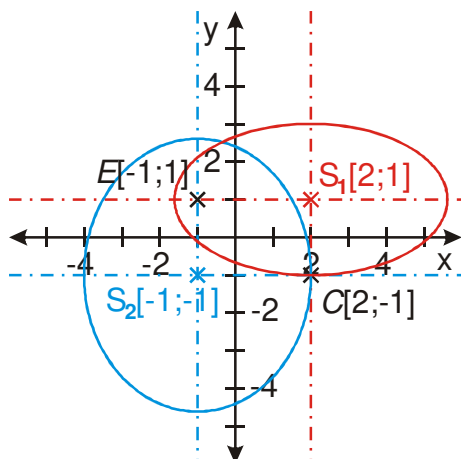
Hlavní vrcholy: $C[2; 4]$, $D[2; -6]$.

Vedlejší vrcholy: $A[6; -1]$, $B[-2; -1]$.

Ohniska: $E[2; 2]$, $F[2; -4]$.

Př. 7: Napiš středovou rovnici elipsy, jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, pokud znáš souřadnice vedlejšího vrcholu $C[2; -1]$ a jednoho ohniska $E[-1; 1]$.

Nakreslíme si obrázek:



Osy elipsy jsou rovnoběžné se souřadnými osami \Rightarrow dvě možnosti:

- vedlejší osa prochází bodem C a je svislá \Rightarrow hlavní osa musí být vodorovná přímka procházející ohniskem \Rightarrow červená vodorovně orientovaná elipsa se středem $S_1[2;1]$,
- vedlejší osa prochází bodem C a je vodorovná \Rightarrow hlavní osa musí být svislá přímka procházející ohniskem \Rightarrow modrá svisle orientovaná elipsa se středem $S_2[-1;-1]$.

Červená vodorovně orientovaná elipsa s $S_1[2;1]$.

Výstřednost elipsy: $e = |S_1E| = 3$.

Vedlejší poloosa: $b = |S_1C| = 2$.

Hlavní poloosa: $a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Rovnice elipsy: $\frac{(x-2)^2}{13} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Modrá svisle orientovaná elipsa s $S_2[-1;-1]$.

Výstřednost elipsy: $e = |S_2E| = 2$.

Vedlejší poloosa: $a = |S_2C| = 3$.

Hlavní poloosa: $b^2 = a^2 + e^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + e^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Rovnice elipsy: $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{13} = 1$.

Shrnutí: Středová rovnice elipsy je podobná středové rovnici kružnice.